Hindley-Damas-Milner–tyyppipäättely

- Tehtävänä löytää annetun funktion yleisin mahdollinen tyyppi tai todeta tyyppivirhe.
- Algoritmin toiminnan periaate esitetään esimerkein.
- Tyyppisäännöt.

Esimerkki 1

Syöte: `foo(f,g,x) := f(g(x))`

- Kun tullaan funktioon, on näkymä (scope) tässä esimerkissä { `f`:τ_1, `g`:τ_2, `x`:τ_3 }
- Jäsennyksessä muodostetaan funktion jäsennyspuu ja lisäksi jokaiselle jäsennyspuun solmulle luodaan oma tyyppimuuttuja $\tau_4, \ldots$

Jäsennys:

kutsu:τ_4

`f`:τ_5 kutsu:τ_6

`g`:τ_7 `x`:τ_8

- Jokaisesta
  syntaksipuun solmusta muodostetaan ja ratkaistaan samastusyhtälö erikseen määriteltyjen sääntöjen mukaisesti.

Samastettavat:

$\tau_5 \sim \tau_1$	(`f`:n määritelmästä)
$\tau_7 \sim \tau_2$	(`g`:n määritelmästä)
$\tau_8 \sim \tau_3$	(`x`:n määritelmästä)
$\tau_7 \sim \tau_8 \to \tau_6$	(funktiokutsun tyyppisääntö)
$\tau_5 \sim \tau_6 \to \tau_4$	(funktiokutsun tyyppisääntö)

Samastukset: $\tau_5 = \tau_1, \quad \tau_7 = \tau_2, \quad \tau_8 = \tau_3$

$\tau_1 = \tau_6 \to \tau_4$

$\tau_2 = \tau_3 \to \tau_6$

Tulos: `foo` : $(\tau_6 \to \tau_4) \to (\tau_3 \to \tau_6) \to \tau_3 \to \tau_4$

Uudelleennimeämisen jälkeen:

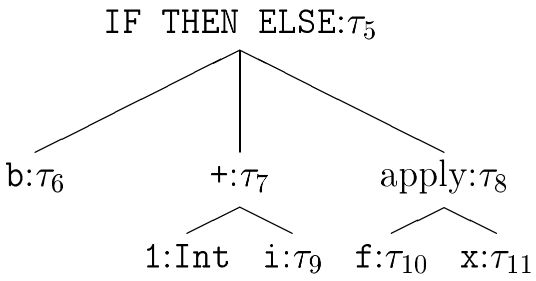
`foo` : $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta$

Esimerkki 2

Syöte: `bar(b,i,f,x) := IF b THEN 1+i ELSE f(x)`

Näkymä: $\{$ b:τ_1, i:τ_2, f:τ_3, x:τ_4 $\}$

Jäsennys:



Samastettavat:

$\tau_6 \sim \tau_1$	(b:n määritelmästä)
$\tau_9 \sim \tau_2$	(i:n määritelmästä)
$\tau_7 \sim \tau_9 \sim \texttt{Int}$	(yhteenlaskun tyyppisääntö)
$\tau_{10} \sim \tau_3$	(f:n määritelmästä)
$\tau_{11} \sim \tau_4$	(x:n määritelmästä)
$\tau_{10} \sim \tau_{11} \rightarrow \tau_8$	(funktiokutsun tyyppisääntö)
$\tau_6 \sim \texttt{Bool}$	(IFin argumentin oltava totuusarvo)
$\tau_7 \sim \tau_8 \sim \tau_5$	(THENin ja ELSEn oltava samaa tyyppiä)

Samastukset:

$\tau_1 = \texttt{Bool}$

$\tau_2 = \texttt{Int}$

$\tau_3 = \tau_4 \rightarrow \texttt{Int}$

τ_4 vapaa muuttuja, ei rajoitettu

$\tau_5 = \texttt{Int}$

Tulos uudelleennimeämisen jälkeen:

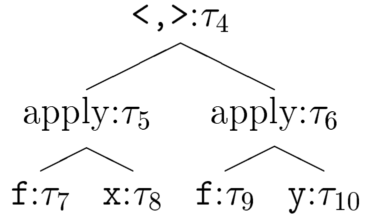
$\texttt{bar} : \texttt{Bool} \rightarrow \texttt{Int} \rightarrow (\alpha \rightarrow \texttt{Int}) \rightarrow \alpha \rightarrow \texttt{Int}$

Esimerkki 3

Syöte: `pari(x,y) := <f(x),f(y)>`

Näkymä: $\{$ `x`:τ_1, `y`:τ_2, `f`:$\alpha \to \alpha$ $\}$

Jäsennys:



Samastettavat:

$\tau_7 \sim \tau_{11} \to \tau_{11}$	(`f`:n määritelmästä, huomaa vapaiden muuttujien uudelleennimeäminen!)
$\tau_8 \sim \tau_1$	(`x`:n määritelmästä)
$\tau_9 \sim \tau_{12} \to \tau_{12}$	(`f`:n määritelmästä)
$\tau_{10} \sim \tau_2$	(`y`:n määritelmästä)
$\tau_7 \sim \tau_8 \to \tau_5$	(funktiokutsun tyyppisääntö)
$\tau_9 \sim \tau_{10} \to \tau_6$	(funktiokutsun tyyppisääntö)
$\tau_4 \sim \langle \tau_5, \tau_6 \rangle$	

Unifikaatiosta: Koska sekä $\tau_7 \sim \tau_{11} \to \tau_{11}$ että $\tau_7 \sim \tau_8 \to \tau_5$, niin seuraa, että $\tau_5 = \tau_8 = \tau_{11}$. Vastaavasti τ_9:lle.

Samastukset:

$\tau_1 = \tau_{11}$
$\tau_2 = \tau_{12}$
$\tau_4 = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$

Tulos uudelleennimeämisen jälkeen:

`pari` : $\alpha \to \beta \to \langle \alpha, \beta \rangle$

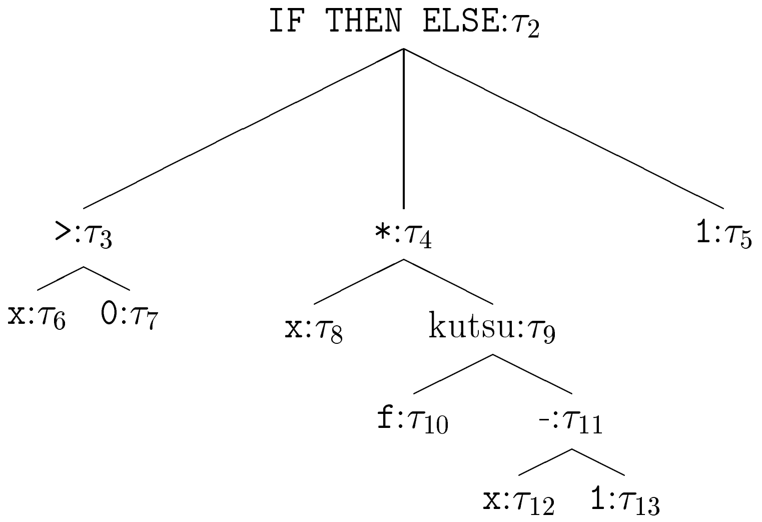
(Jos vapaita muuttujia ei oltaisi nimetty uudelleen, olisi tyypiksi tullut $\alpha \to \alpha \to \langle \alpha, \alpha \rangle$.)

Esimerkki 4

Syöte:
```
fac(x) :=
  IF x > 0
  THEN x*fac(x-1)
  ELSE 1;
```

Näkymä: { x:τ_1}

Jäsennys:



Samastettavat: $\tau_5 \sim \texttt{Int}$, $\tau_7 \sim \texttt{Int}$, $\tau_{13} \sim \texttt{Int}$, $\tau_4 \sim \texttt{Int}$, $\tau_8 \sim \texttt{Int}$,
$\tau_9 \sim \texttt{Int}$, $\tau_{11} \sim \texttt{Int}$, $\tau_{12} \sim \texttt{Int}$
$\tau_1 \sim \tau_6$, $\tau_1 \sim \tau_8$, $\tau_1 \sim \tau_{12}$, $\tau_4 \sim \tau_5$, $\tau_6 \sim \tau_7$, $\tau_3 \sim \texttt{Bool}$
$\tau_8 \sim \tau_9 \to \tau_4$

Samastukset: $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \texttt{Int}$,
$\tau_3 = \texttt{Bool}$,
$\tau_8 = \texttt{Int} \to \texttt{Int}$

Samastukset: $fac : \texttt{Int} \to \texttt{Int}$

Samastusalgoritmi

SAMASTA(*yhtalot*)

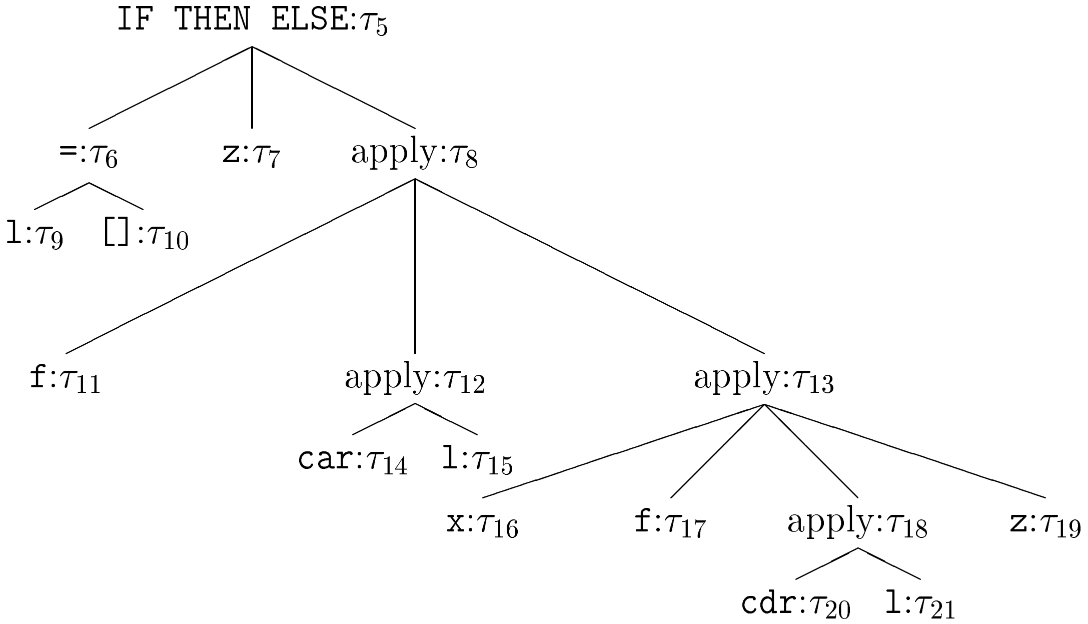
ratkaisut $\leftarrow \emptyset$
repeat
    Valitse mielivaltainen yhtalo e pois joukosta *yhtalot.*
    switch e
        case (*Muuttuja* $v \sim \tau$ **or** $\tau \sim$ *Muuttuja* v)
            and v ei esiinny lausekkeessa τ :
            Korvaa muuttuja v kaikkialla lausekkeella τ.
            – sekä joukossa *yhtälöt* että joukossa *ratkaisut.*
            ratkaisut $\leftarrow$ *ratkaisut* $\cup \{v = \tau\}$
        case $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \sim \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$:
            yhtalot $\leftarrow$ *yhtalot* $\cup \{\tau_1 \sim \sigma_1, \tau_2 \sim \sigma_2\}$
        case $[\tau] \sim [\sigma]$:
            yhtalot $\leftarrow$ *yhtalot* $\cup \{\tau \sim \sigma\}$
            $\vdots$
        case $x \sim x$:
            Ei tehdä mitään.
        case default :
            Ilmoita tyyppivirheestä
until *yhtalot* $= \emptyset$
return *ratkaisut*

Esimerkki 5

Syöte:
```
foldr'(x, f, l, z) :=
  IF l = []
  THEN z
  ELSE f(car(l), x(f, cdr(l), z))
```

Näkymä: $\{$ `x`:τ_1, `f`:τ_2, `l`:τ_3, `z`:τ_4, `[]`:$[\alpha]$, `car`:$[\alpha] \to \alpha$, `cdr`:$[\alpha] \to [\alpha]$ $\}$

Jäsennys:



Samastettavat: $\tau_9 \sim \tau_3,\ \tau_{10} \sim [\tau_{22}],\ \tau_9 \sim \tau_{10},\ \tau_6 \sim \texttt{Bool},$
$\tau_7 \sim \tau_4,\ \tau_{11} \sim \tau_2,\ \tau_{14} \sim [\tau_{23}] \to \tau_{23},\ \tau_{15} \sim \tau_3,$
$\tau_{14} \sim \tau_{15} \to \tau_{12}, \tau_{16} \sim \tau_1,\ \tau_{17} \sim \tau_2,$
$\tau_{20} \sim [\tau_{24}] \to [\tau_{24}],\ \tau_{21} \sim \tau_3, \tau_{20} \sim \tau_{21} \to \tau_{18},$
$\tau_{19} \sim \tau_4,\ \tau_{16} \sim \tau_{17} \to \tau_{18} \to \tau_{19} \to \tau_{13},$
$\tau_{11} \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \tau_6 \sim \texttt{Bool},\ \tau_7 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5$

- Esimerkki 5:n samastusyhtälöiden ensimmäisen rivin kaikki yhtälöt laukeavat ensimmäisessä säännössä, ja jäljelle jää *yhtälöiksi*
  $\tau_7 \sim \tau_4,\ \tau_{11} \sim \tau_2,\ \tau_{14} \sim [\tau_{23}] \to \tau_{23},\ \tau_{15} \sim [\tau_{22}],$
  $\tau_{14} \sim \tau_{15} \to \tau_{12}, \tau_{16} \sim \tau_1,\ \tau_{17} \sim \tau_2,$
  $\tau_{20} \sim [\tau_{24}] \to [\tau_{24}],\ \tau_{21} \sim [\tau_{22}], \tau_{20} \sim \tau_{21} \to \tau_{18},$
  $\tau_{19} \sim \tau_4,\ \tau_{16} \sim \tau_{17} \to \tau_{18} \to \tau_{19} \to \tau_{13},$
  $\tau_{11} \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \texttt{Bool} \sim \texttt{Bool},\ \tau_7 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5$
  sekä *ratkaisujen* meitä kiinnostavaksi osaksi
  $\tau_3 = [\tau_{22}]$
- Kun edellisen ylin rivi käsitelty, *yhtälöt* on joukko
  $[\tau_{23}] \to \tau_{23} \sim [\tau_{22}] \to \tau_{12}, \tau_{16} \sim \tau_1,\ \tau_{17} \sim \tau_2,$
  $\tau_{20} \sim [\tau_{24}] \to [\tau_{24}],\ \tau_{21} \sim [\tau_{22}], \tau_{20} \sim \tau_{21} \to \tau_{18},$
  $\tau_{19} \sim \tau_4,\ \tau_{16} \sim \tau_{17} \to \tau_{18} \to \tau_{19} \to \tau_{13},$
  $\tau_2 \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \texttt{Bool} \sim \texttt{Bool},\ \tau_4 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5$
- Nyt ylimmältä riviltä tulee ensimmäisestä yhtälöstä kaksi uutta yhtälöä, jotka tässä viimeisinä:
  $\tau_{20} \sim [\tau_{24}] \to [\tau_{24}],\ \tau_{21} \sim [\tau_{22}], \tau_{20} \sim \tau_{21} \to \tau_{18},$
  $\tau_{19} \sim \tau_4,\ \tau_1 \sim \tau_2 \to \tau_{18} \to \tau_{19} \to \tau_{13},$
  $\tau_2 \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \texttt{Bool} \sim \texttt{Bool},\ \tau_4 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5,$
  $[\tau_{23}] \sim [\tau_{22}],\ \tau_{23} \sim \tau_{12}$
- $\tau_{19} \sim \tau_4,\ \tau_1 \sim \tau_2 \to \tau_{18} \to \tau_{19} \to \tau_{13},$
  $\tau_2 \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \texttt{Bool} \sim \texttt{Bool},\ \tau_4 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5,$
  $[\tau_{23}] \sim [\tau_{22}],\ \tau_{23} \sim \tau_{12},$
  $[\tau_{24}] \sim [\tau_{22}],\ [\tau_{24}] \sim \tau_{18}$
- $\tau_2 \sim \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_8,\ \texttt{Bool} \sim \texttt{Bool},\ \tau_4 \sim \tau_5,\ \tau_8 \sim \tau_5,$
  $[\tau_{23}] \sim [\tau_{22}],\ \tau_{23} \sim \tau_{12},$
  $[\tau_{24}] \sim [\tau_{22}],\ [\tau_{24}] \sim \tau_{18}$
  ratkaisut $= \{\tau_1 = \tau_2 \to \tau_{18} \to \tau_4 \to \tau_{13},\ \tau_3 = [\tau_{22}]\}$
- $[\tau_{23}] \sim [\tau_{22}],\ \tau_{23} \sim \tau_{12},$
  $[\tau_{24}] \sim [\tau_{22}],\ [\tau_{24}] \sim \tau_{18}$
  $\tau_1 = (\tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_5) \to \tau_{18} \to \tau_5 \to \tau_{13},$
  $\tau_2 = \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_5,$

$\tau_3 \;=\; [\tau_{22}],\; \tau_4 \;=\; \tau_5$

- $[\tau_{24}] \;\sim\; [\tau_{22}],\; [\tau_{24}] \;\sim\; \tau_{18}$
  $\tau_{12} \;\sim\; \tau_{22}$
- $\tau_{12} \;\sim\; \tau_{22}$
  $\tau_{24} \;\sim\; \tau_{22}$
  $\tau_1 \;=\; (\tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_5) \to [\tau_{24}] \to \tau_5 \to \tau_{13},$
  $\tau_2 \;=\; \tau_{12} \to \tau_{13} \to \tau_5,$
  $\tau_3 \;=\; [\tau_{22}],\; \tau_4 \;=\; \tau_5$
- Kun loputkin yhtälöt käsitelty, saadaan *ratkaisut*
  $\tau_1 \;=\; (\tau_{22} \to \tau_{13} \to \tau_5) \to [\tau_{22}] \to \tau_5 \to \tau_{13},$
  $\tau_2 \;=\; \tau_{22} \to \tau_{13} \to \tau_5,$
  $\tau_3 \;=\; [\tau_{22}],\; \tau_4 \;=\; \tau_5$

Tulos uudelleennimeämisen jälkeen:

$((\alpha \to \beta \to \gamma) \to [\alpha] \to \gamma \to \beta) \to$
$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to [\alpha] \to \gamma \to \gamma$

- Käytännön toteutuksissa samastus tehdään välittömästi kullekin samastusyhtälölle niiden luomisen jälkeen.
- Käytännössä muuttujat toteutettu indirektioilla jotta korvaus olisi nopeaa.

Rekursio

Syöte:
```
foldr(f, l, z) :=
  IF l = []
  THEN z
  ELSE f(car(l), foldr(f, cdr(l), z))
```

- Kyseessä on usein käytetty katamorfismi:
  `foldr`$(\oplus, [a_1, a_2, \ldots, a_n], \emptyset)= a_1 \oplus (a_2 \oplus \ldots (a_n \oplus \emptyset) \ldots)$
- Mikä on `foldr`in tyyppi tyyppipäättelyn alussa tunnetussa näkyvyydessä?

  (Jos se on kuvitteellinen $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta$, niin `foldr`in tyypiksi tulisi $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to [\alpha] \to \gamma \to \gamma$, mikä on liian yleinen.)
- Käytetään primitiiviä `FIX`, jonka tyyppi on $(\alpha \to \alpha) \to \alpha$.

```
foldr(f, l, z) :=
  LET g := FIX foldr'
  IN g(f, l, z)
```

- `foldr'`n tyyppi on käsitelty esimerkissä 5:
  $((\alpha \to \beta \to \gamma) \to [\alpha] \to \gamma \to \beta) \to$
  $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to [\alpha] \to \gamma \to \gamma$
- Koska `FIX`in argumentin tyyppi on $\alpha \to \alpha$, saadaan samastettavaksi:
  $\tau_1 \to \tau_1 \ \sim$
  $((\tau_2 \to \tau_3 \to \tau_4) \to [\tau_2] \to \tau_4 \to \tau_3) \to$
  $(\tau_2 \to \tau_3 \to \tau_4) \to [\tau_2] \to \tau_4 \to \tau_4$
  mikä toteutuu jos $\tau_4 = \tau_3$.
- `g`:n tyypiksi (τ_1) tulee siis $(\alpha \to \beta \to \beta) \to [\alpha] \to \beta \to \beta$, mikä on myös `foldr`in tyyppi.
- (Ilman currytusta pitäisi määritellä oma `FIX` kaikille mahdollisille ariteeteille.)

Tyyppisäännöt

- $\Gamma \vdash e : \tau$ luetaan "näkymässä Γ lausekkeella e on tyyppi τ".
- $\frac{P_1 \ldots P_n}{C}$ luetaan esim. "jos P_1 ja $\ldots P_n$, niin C".

(NUM)
$$\frac{}{\Gamma \vdash \texttt{IntConst}\ n : \texttt{Int}}$$

(TAUT+INST)
$$\frac{}{\Gamma \cup \{x : \tau\} \vdash \texttt{Var}\ v : \texttt{replace\_free\_type\_vars}(\tau)}$$

(IF)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \texttt{Bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau \qquad \Gamma \vdash e_3 : \tau}{\Gamma \vdash (\texttt{IF}\ e_1\ \texttt{THEN}\ e_2\ \texttt{ELSE}\ e_3) : \tau}$$

(APPLY)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash e_1(e_2) : \sigma}$$

(FIX)
$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \to \tau}{\Gamma \vdash \texttt{FIX}\ e : \tau}$$

(ABS)
$$\frac{(\Gamma - \{x : \_\ \}) \cup \{x : \tau\} \vdash e : \sigma}{\Gamma \vdash (\texttt{FUNCTION}(x) := e) : \tau \to \sigma}$$

(LET)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau \qquad (\Gamma - \{x : \_\ \}) \cup \{x : \tau\} \vdash e_2 : \sigma}{\Gamma \vdash (\texttt{LET}\ x := e_1\ \texttt{IN}\ e_2) : \sigma}$$

$$\vdots$$

- Jokaisen erilaisen syntaksipuun solmun kohdalla vain yhden säännön implikaatiopuoli tulee kyseeseen.
- Säännöt vastaavat intuitionistisen logiikan aksiomia ja tautologioita, esim. **APPLY** vastaa sääntöä *modus ponens*:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}$$

Perustyypit vastaavat faktoja, samastusyhtälöt todistusta, samatuksen tulos todistettavaa kaavaa.

HM:n laajennuksia

- Hyvät virheilmoitukset.
- Tyyppisäännöt mutatoitaville viittauksille, poikkeuksille, kontinuaatioille jne.
- Mittayksiköiden huomioiminen tyypityksessä, esim. kg + m on havaittava tyyppivirhe.
- Tyyppimuuttujaan liittyvien rajoitusten (constraint) ylläpitäminen, esim.
  - `has_field(`τ`, "foo")`
  - `does_not_have_field(`τ`, "foo")`
  - `has_equality(`τ`)`
  - `has_order(`τ`)`
  - `is_numerical(`τ`)`
  - `is_subtype_of(`σ`, `τ`)`
- Tyyppiluokat.

Pohdittavaa

1. Mikä on funktion

   ```
   call(f,x) := f(x)
   ```

   tyyppi? Mitä logiikan tautologiaa se vastaa?

2. Suorita tyyppipäättely funktiolle

   ```
   append(l1, l2) :=
     IF l1 = []
     THEN l2
     ELSE cons(car(l1), append(cdr(l1), l2))
   ```

3. Miksi samastusalgoritmin rivin 6 testi on olemassa?
   Vihje: $\tau_1 \sim [\tau_1]$ tai kahteen kertaan $\tau_1 \sim \tau_1 \to \tau_1$

4. Miten samastusalgoritmissa näkyy se, jos käytetään tyyppien rakenteellista ekvivalenssia verrattuna nimiekvivalenssiin?

5. Mitä tautologioita vastaavat esimerkeissä päätellyt tyypit?

6. Määrittele Nolangin `MATCH`eille ja patterneille sopivat tyyppisäännöt.

7. Tyyppisääntö **FIX** vastaa päättelysääntöä

   $$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \tau}{\Gamma \vdash \tau}$$

   Tämähän ei kuitenkaan ole totta. Missä vika?