Tik-76.123 Algoritmien suunnittelu ja analyysi

Harjoitus 6

1. Kirjoita dynaamiseen ohjelmointiin perustuva algoritmi, joka laskee binomikertoimen $\binom{n}{k}$, $n \geqslant 1, 0 \leqslant n$. Algoritmin tulee toimia ajassa $O(nk)$ ja tilassa $O(k)$. (Algoritmi laskee Pascalin kolmion rivejä.)

2. Kirjoita algoritmi, joka korottaa luvun kokonaislukupotenssiin ja joka vaatii ajan $O(\log n)$, kun lasketaan x^n:n arvoa. *Vihje:* Käytä hajoita ja hallitse -menetelmää.

3. Tehtävänä on etsiä järjestämättömän lukujonon minimi- ja maksimialkio. Jos alkioiden etsimiseen käytetään peräkkäishakua, tarvitaan $2 \cdot (n-1)$ vertailua, jos lukujen määrä $n > 2$. Suunnitele algoritmi, joka suorittaa tehtävän $3n/2 - 2$ vertailulla (voit olettaa algoritmisi analyysissä, että $n = 2^k$ jollakin kokonaisluvulla $k \geq 1$).

4. Binäärirelaation R transitiivinen sulkeuma R^+ on pienin sellainen transitiivinen relaatio, joka sisältää R:n. Äärellisen joukon transitiivinen sulkeuma R^+ voidaan laskea ottamalla laskettavaan joukkoon jokainen potenssi R^i, $i > 0$, joka ei jo ole joukossa. Tässä

$$R^i = R^{i-1} \circ R = \{(a,c) \mid (a,b) \in R^{i-1}, (b,c) \in R \text{ jollain } b\}.$$

   Algoritmi päättyy, sillä $R^{n+1} = R^n$ jollain n. Kirjoita hajoita ja hallitse -menettelyyn perustuva sulkeuman laskenta-algoritmi, joka suorittaa ainoastaan $O(\log n)$ kompositio-operaatiota ($\circ$).

5. Tasapainoisen binäärihakupuun S kaikki avaimet ovat pienempiä kuin tasapainoisen binäärihakupuun T avaimet. Suunnittele algoritmi, joka yhdistää puut yhdeksi tasapainoiseksi binäärihakupuuksi (Liitä-operaatio). Algoritmi saa vaatia ajan $O(\log n)$, jossa n on suuremman puun avainten määrä.