Tik-76.123 Algoritmien suunnittelu ja analyysi

Harjoitus 10

1. Tarkastellaan seuraavaa sijoitteluongelmaa (esimerkiksi sähkölaitteiden sijoittelussa): Suuntaamattoman verkon solmut ("laitteet") ovat $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ja kaarien kustannukset $w(q_i, q_j)$ (positiivisia kokonaislukuja "kaapelien lukumäärä välillä (q_i, q_j)"). On määrättävä sellainen solmujen järjestys $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_n}$, että

$$\sum_{i,j} \mid i - j \mid \cdot w(q_{k_i}, q_{k_j})$$

("kaapelien yhteispituus") olisi mahdollisimman pieni. Hahmottele ongelmalle ahne ratkaisualgoritmi. Tuottaako se aina optimin?

2. Taulukon `T` sisältö (paikat `T[1], T[2], ..., T[22]`) on

```
9 11 11 11 4 19 7 6 19 6 21 9 7 14 14 4 15 14 7 22 9 14.
```

Taulukko on erään joukkokokoelman union-find -rakenteen toteutus. Kokoelmaan kohdistetaan operaatio union(find(4), find(15)). Union suoritetaan koon mukaan (pienempi puu suuremman puun juuren alipuuksi) ja findien yhteydessä polku tiivistetään. Piirrä (a) taulukon sisältämä metsä ennen operaatioiden suorittamista; (b) taulukon sisältämä metsä find-operaatioiden jälkeen ja (c) taulukon sisältämä metsä union-operaation jälkeen. (d) Selvitä taulukon sisältö union-operaation jälkeen.

3. Selvitä askeleittain, miten Kruskalin algoritmi löytää harjoitusten 8 tehtävässä 4 annetun verkon minimaalisen virittävän puun.

4. Union-find -rakenne on toteutettu siten, että union-operaatiossa pienempi puu tulee aina suuremman puun juuren alipuuksi. Find-operaation yhteydessä ei rakennetta muuteta. Perustele, miksi find-operaatio vaatii ajan $O(\log n)$, missä n on rakenteeseen talletettujen alkioiden määrä.

5. Union-find -rakenne on toteutettu siten, että union-operaatiossa suurempi puu tulee aina pienemmän puun juuren alipuuksi. Find-operaation yhteydessä ei rakennetta muuteta. Mikä on find-operaation ja mikä union-operaation aikavaativuus pahimmassa tapauksessa?